Proyecto CLCript
Cuadernos de Laboratorio de Criptografía. Entrega nº 14. Ultima actualización 16/05/19
Autor: Dr. Jorge Ramió Aguirre (@criptored)
Práctica sobre curiosidades y falsos positivos en ataques por paradoja del cumpleaños a RSA

- Software genRSA v2.1: http://www.criptored.upm.es/software/sw_m001d.htm
- Software SAMCript: http://www.criptored.upm.es/software/sw_m001t.htm

Objetivos:

1. Observar la existencia de falsos positivos en los ataques por paradoja de cumpleaños en RSA y comprobar lo que significan.
2. Observar y comprobar que los falsos positivos en un ataque por la paradoja del cumpleaños a RSA tienden a ubicarse en torno a las inmediaciones de los números no cifrables NNC, y que las colisiones producidas en el ataque parecen mostrar un comportamiento peculiar.

I. Clave privada y falsos positivos en ataques por la paradoja del cumpleaños

Ejercicio 1

1.1. Con genRSA, ataca por paradoja del cumpleaños (Ataques -> Paradoja del Cumpleaños) esta clave RSA de 32 bits, usando como Mensaje M = 172 y comprueba que se obtiene el número 19.161.665, que veremos más adelante será un falso positivo.
Datos públicos Clave1: n = 2.934.102.643, e = 65.537.

1.2. Observa que colisiona el primer resultado de la columna i (valor 1) con un resultado posterior de la columna j.

1.3. Comprueba con SAMCript que se cumplen las ecuaciones de ataque:
w = (i - j) / mcd (e, |i - j|) t = inv (e, w) donde t es la clave buscada

1.4. Con SAMCript factoriza el módulo n = 2.934.102.643 = p*q =

1.5. Ahora con los primos p y q, genera la clave y comprueba que 19.161.665 no es ni la clave privada d ni una clave privada pareja.

1.6. Comprueba con SAMCript que la clave encontrada 19.161.665, un falso positivo, que sólo sirve para descifrar el criptograma que da origen la cifra del mensaje usado en el ataque, en este caso M = 172, y no otros. Comprueba que ese criptograma se descifra también -como es lógico- con la clave privada d o con cualquier clave privada pareja.

1.7. Si hacemos ataques por la paradoja del cumpleaños a esta clave RSA con 1 < M < 300, podemos comprobar que siempre se obtiene la clave privada d = 239.511.473, excepto cuando M = 172 que aparece el falso positivo 19.161.665. Por ejemplo ataca con M = 50, M = 100, M = 150, M = 200 y M = 250. ¿Qué conclusión puedes sacar de esto?

1.8. Observa que ahora colisiona el primer resultado de la columna j (valor 1.075.491.957) con un resultado posterior de la columna i. Puedes comprobar, si lo deseas, que todas las colisiones que entregan la clave privada (un ataque con final exitoso), se producen por la colisión entre un resultado de la columna i y el primer resultado de la columna j.

1.9. Haz un ataque por paradoja del cumpleaños a esta clave, tomando como valores de entrada M = 55.447.904 y M = 55.447.905, los dos primeros números no cifrables NNC después del 0 y el 1. ¿Qué ha pasado con el ataque?

1.10. Encuentra todos los NCC de esta clave generando el log correspondiente.

1.11. Hecho esto, observa esta curiosidad: excepto para los valores 0 y 1, los falsos positivos aparecen en las inmediaciones de los NNC, por ejemplo NNC-2, NNC-1, NNC+1, NNC+2.

1.12. Observa además que cuando se obtiene un falso positivo en el ataque por paradoja del cumpleaños, las colisiones pueden producirse ahora entre un resultado de la columna j con el primer resultado de la columna i, que es el valor 1.

Comprueba tu trabajo:

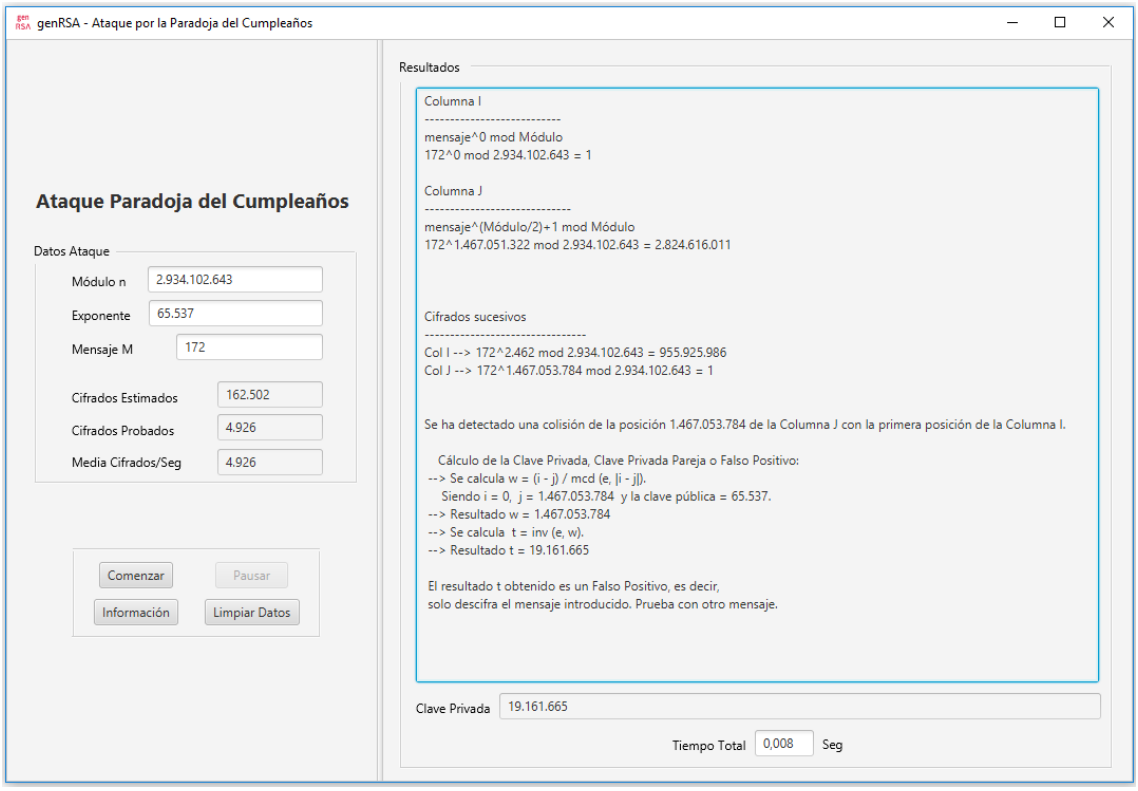


Figura 1. Ataque a la Clave1 con M = 172 que entrega la clave 19.161.665, un falso positivo.

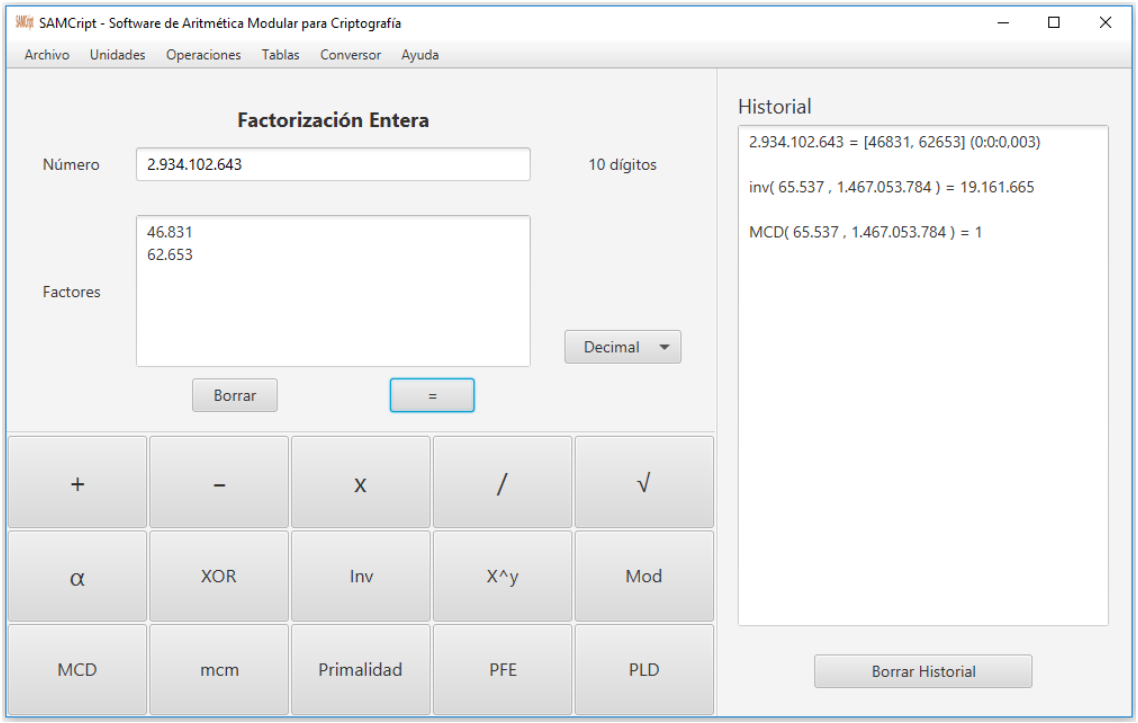


Figura 2. Valores de la ecuación en resultado paradoja del cumpleaños y factorización del módulo n (p = 46.831, q = 62.653).

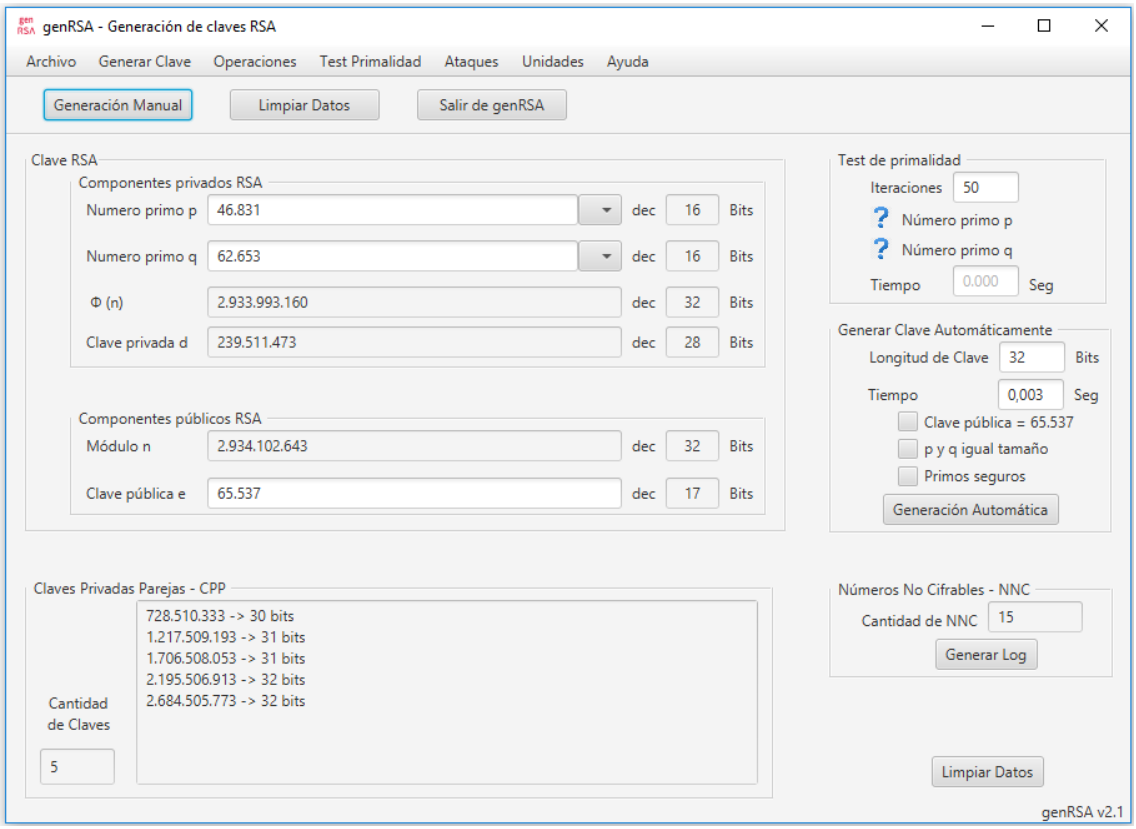


Figura 3. Generación de la Clave1, en que 19.161.665 no es la clave privada d, ni tampoco ninguna de las 5 claves privadas parejas.

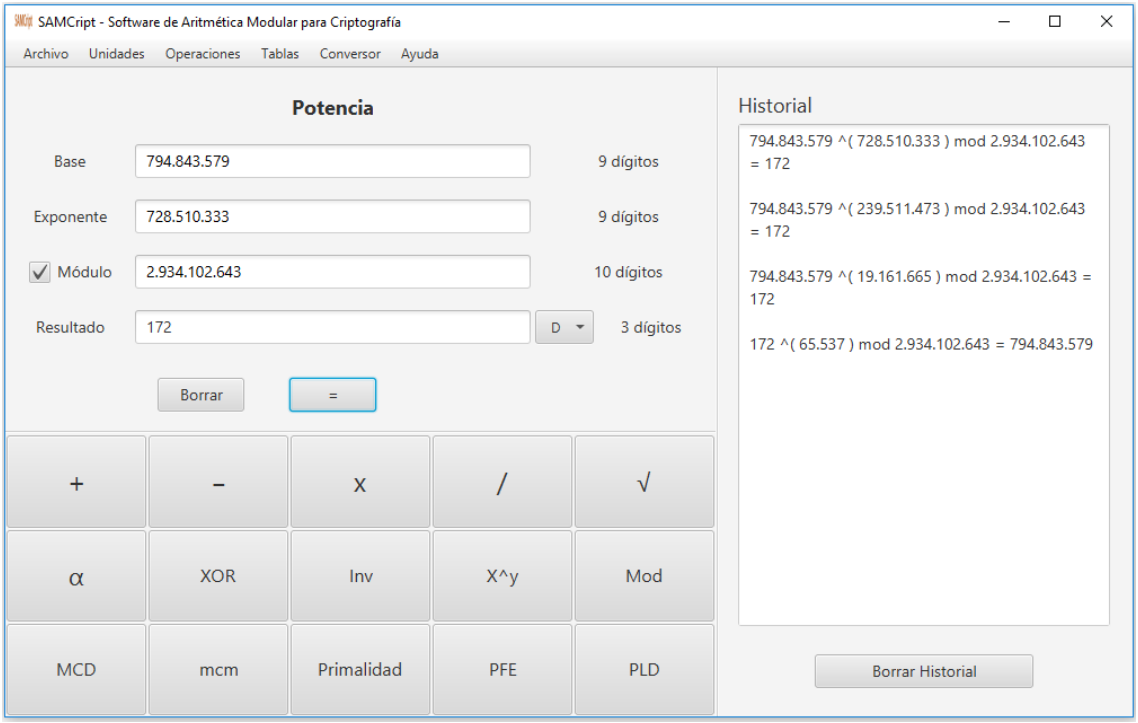


Figura 4. Comprobación que la cifra del número 172 (794.843.579) se descifra con el falso positivo 19.161.665, como también se descifra con la clave privada (239.511.473) y con la primera clave privada pareja (728.510.333).

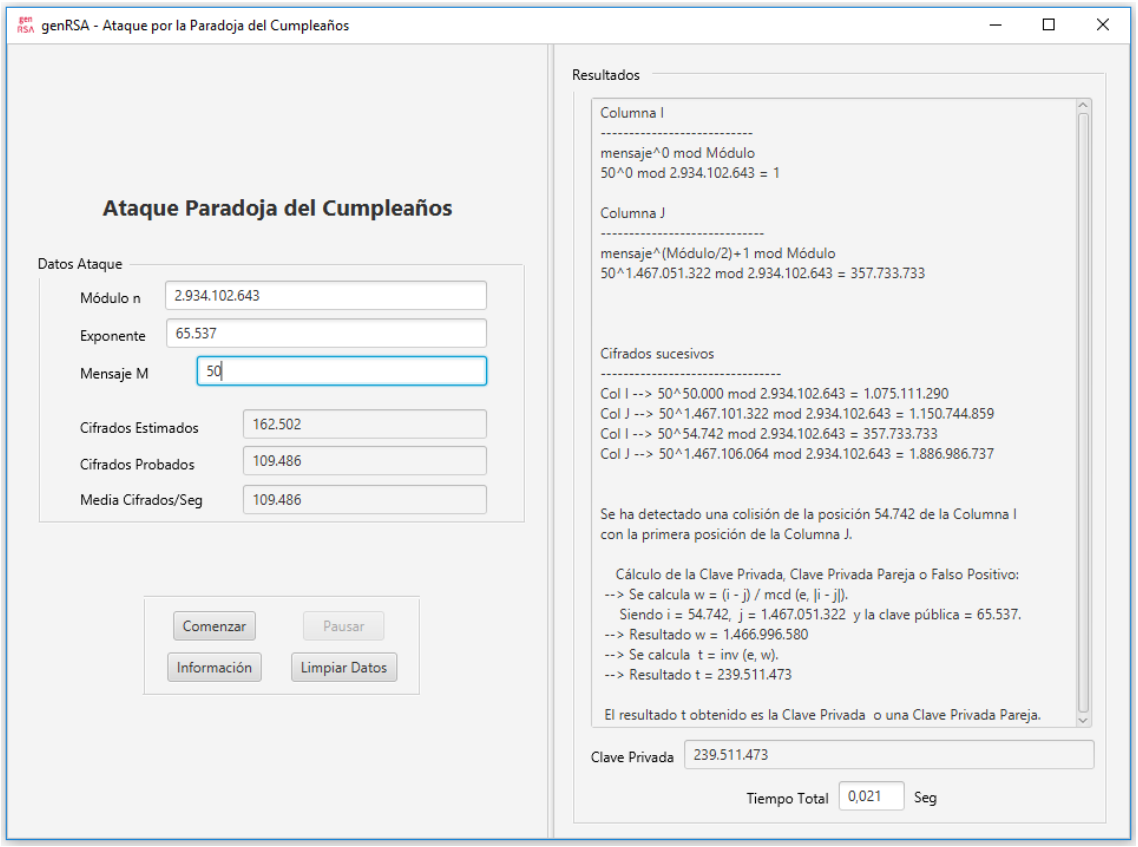


Figura 4. Ataque por la paradoja del cumpleaños con M = 50

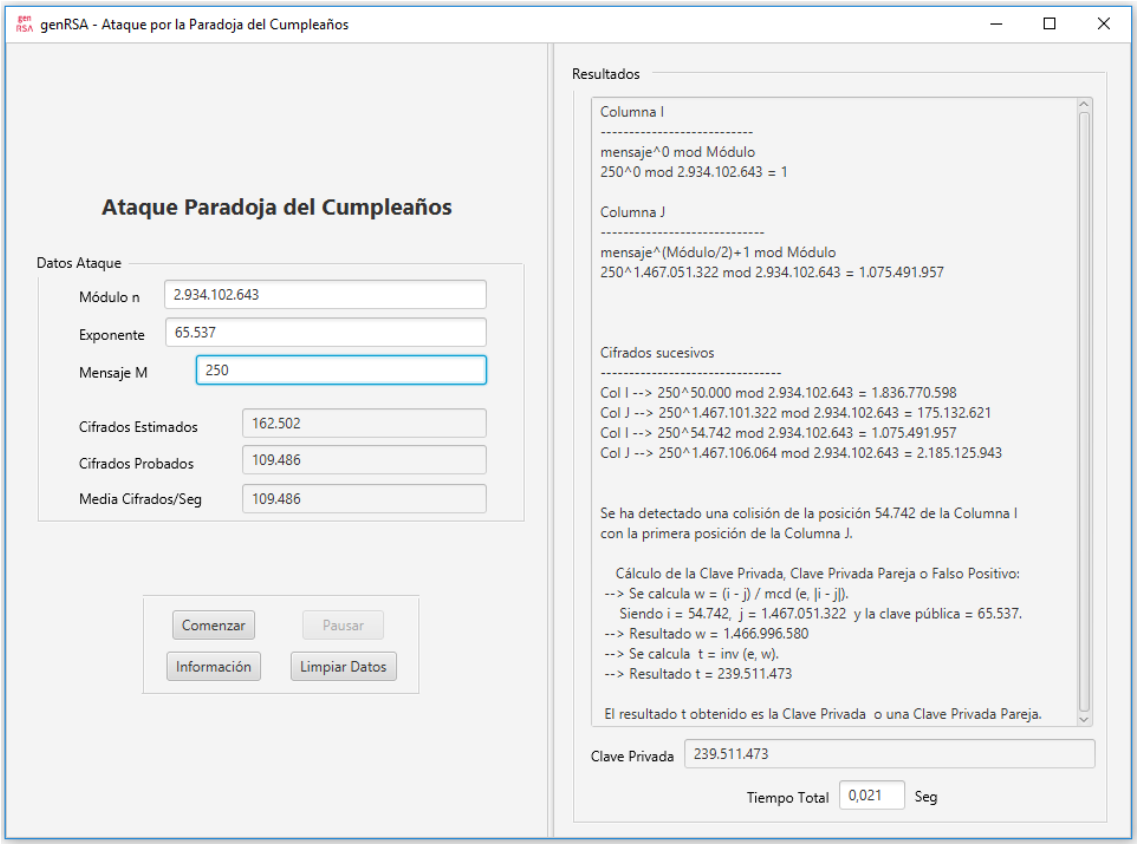


Figura 5. Ataque por la paradoja del cumpleaños con M = 250

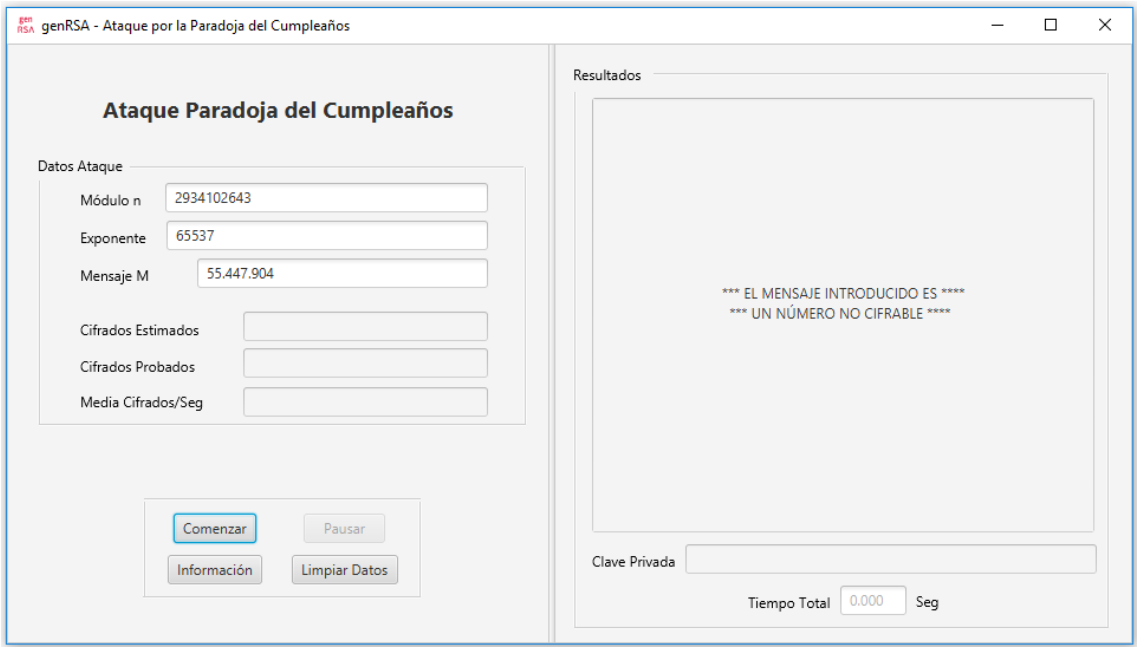
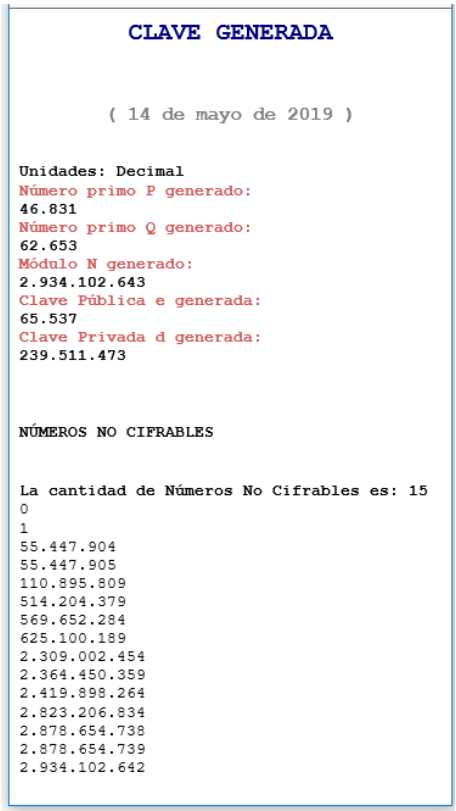


Figura 6. Ataque por la paradoja del cumpleaños con M = 55.447.904, un número no cifrable.



CLAVE GENERADA

(14 de mayo de 2019)

Unidades: Decimal
Número primo P generado:
46.831
Número primo Q generado:
62.653
Módulo N generado:
2.934.102.643
Clave Pública e generada:
65.537
Clave Privada d generada:
239.511.473

NÚMEROS NO CIFRABLES

La cantidad de Números No Cifrables es: 15
0
1
55.447.904
55.447.905
110.895.809
514.204.379
569.652.284
625.100.189
2.309.002.454
2.364.450.359
2.419.898.264
2.823.206.834
2.878.654.738
2.878.654.739
2.934.102.642

Figura 7. Los 15 números no cifrables de la clave.

Para NNC = 55.447.904, con M = 55.447.903 (-1) obtenemos 510.919.937, un FP
Para NNC = 55.447.905, con M = 55.447.906 (+1) obtenemos 1.068.238.568, un FP
Para NNC = 110.895.809, con M = 110.895.807 (-2) obtenemos 510.919.937, un FP
Para NNC = 110.895.809, con M = 110.895.810 (+1) obtenemos 1.068.238.568, un FP
Para NNC = 110.895.809, con M = 110.895.811 (+2) obtenemos 953.107.013, un FP
Para NNC = 514.204.379, con M = 514.204.381 (+2) obtenemos 510.919.937, un FP
Para NNC = 569.652.284, con M = 569.652.283 (-1) obtenemos 510.919.937, un FP
Para NNC = 569.652.284, con M = 569.652.285 (+1) obtenemos 510.919.937, un FP
Para NNC = 2.309.002.454, con M = 2.309.002.455 (+1) obtenemos 85.622.498, un FP
Para NNC = 2.309.002.454, con M = 2.309.002.456 (+2) obtenemos 510.919.937, un FP
Para NNC = 2.364.450.359, con M = 2.364.450.358 (-1) obtenemos 510.919.937, un FP
Para NNC = 2.364.450.359, con M = 2.364.450.360 (+1) obtenemos 85.622.498, un FP
Para NNC = 2.419.898.264, con M = 2.419.898.262 (+2) obtenemos 510.919.937, un FP
Para NNC = 2.823.206.834, con M = 2.823.206.833 (-1) obtenemos 953.107.013, un FP
Para NNC = 2.823.206.834, con M = 2.823.206.832 (-2) obtenemos 953.107.013, un FP
Para NNC = 2.823.206.834, con M = 2.823.206.836 (+2) obtenemos 85.622.498, un FP

Figura 8. Ejemplos de falsos positivos en ataques por paradoja del cumpleaños para valores de M en las inmediaciones de un NNC de Clave1 (n = **, e = 65.537).

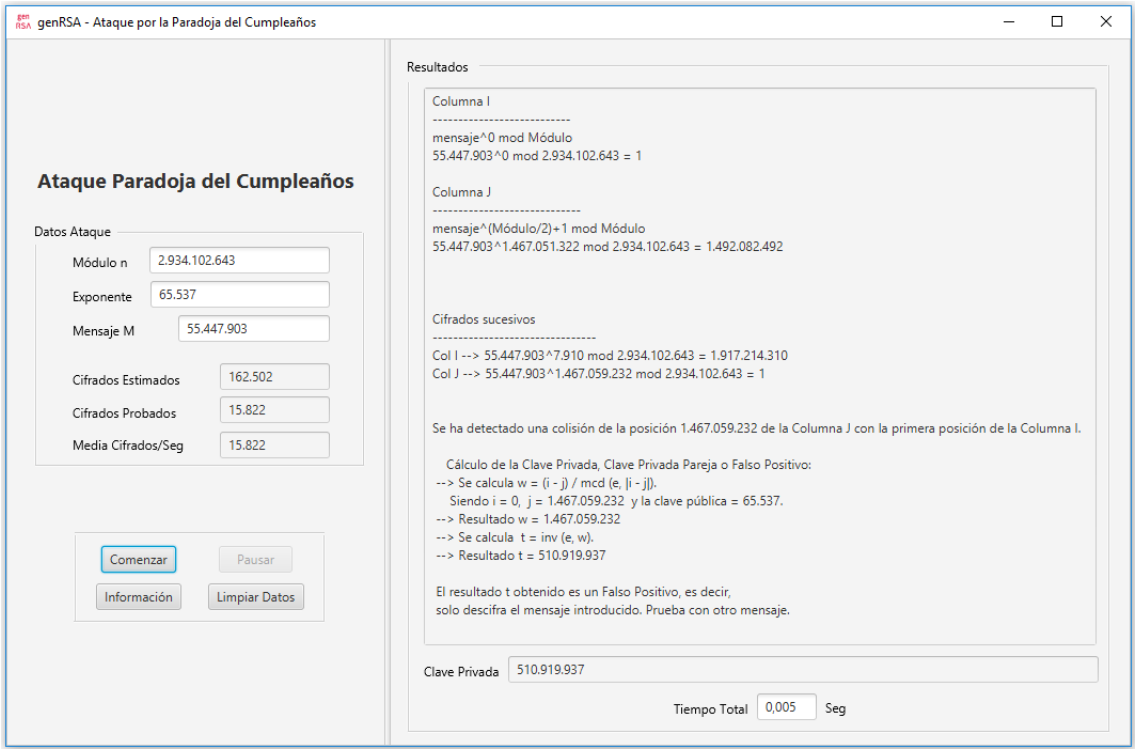


Figura 9. Comprobando que las colisiones por falsos positivos pueden producirse entre el primer resultado de la columna i (valor 1) y un resultado de la columna j.

II. Claves privadas parejas y falsos positivos en ataques por la paradoja del cumpleaños

Ejercicio 2

2.1. Con genRSA realiza un ataque por paradoja del cumpleaños a la clave RSA de 40 bits que se indica siendo M = 2. Datos públicos Clave2: n = 549.876.895.021 y e = 65.537.

2.2. Comprueba que en la vuelta i = 767.465 la cifra de la columna i colisiona con el primer valor de la columna j, entregando como resultado del ataque el valor 113.365.593.907.

2.3. Con SAMCript, cifra N = 123.456 con esta clave RSA (e = 65.537; n = 549.876.895.021) y comprueba que el criptograma C lo descifras con 113.365.593.907.

2.4. Con SAMCript factoriza n = 549.876.895.021 = p*q y luego genera con genRSA la clave Clave2. Comprueba que 113.365.593.907 es la clave privada pareja d'.

2.5. Comprueba que desde M = 2 hasta M = 10 el ataque por la paradoja del cumpleaños siempre devuelve la clave privada pareja d' = 113.365.593.907.

2.6. Con genRSA encuentra los 9 números no cifrables NNC y realiza ataques por paradoja del cumpleaños con los valores NNC-2, NNC-1, NNC+1 y NNC+2 de estos números (excepto el 0 y el 1). Comprueba que en muchos casos se obtiene un falso positivo FP y que la colisión puede ser entre un resultado de j con el primer resultado de i, que es 1.

Comprueba tu trabajo:

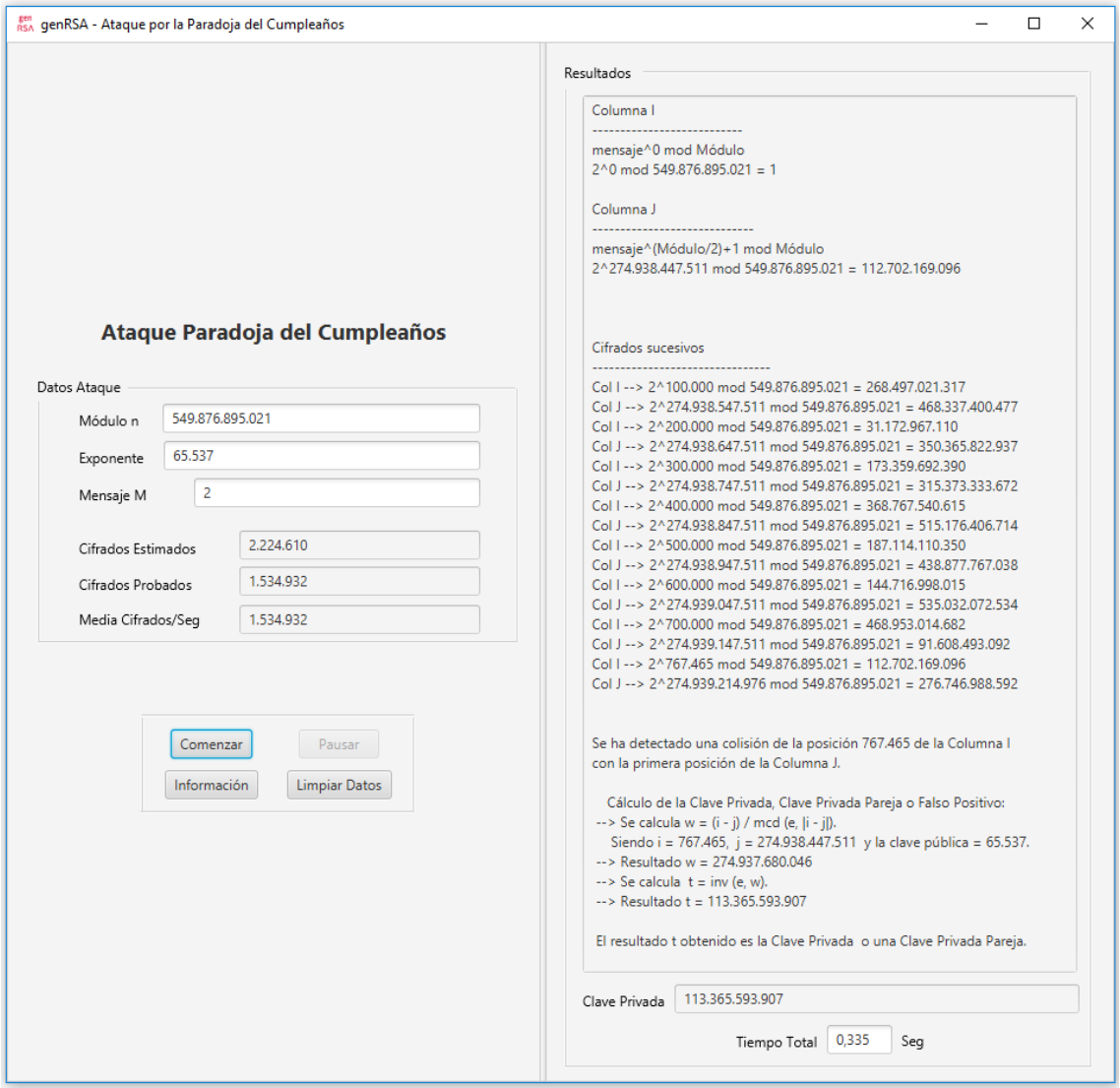


Figura 10. Ataque a la Clave2 con M = 2 que entrega la clave 19.161.665.

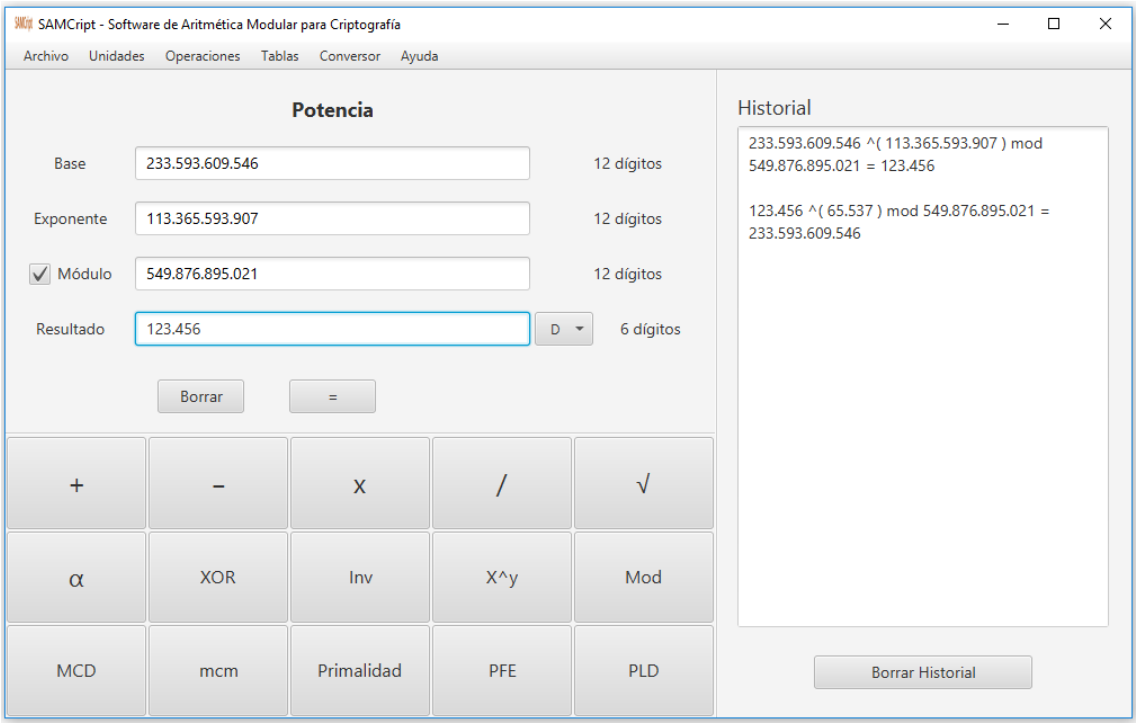


Figura 11. La clave 19.161.665 descifra el criptograma 233.593.609.546.

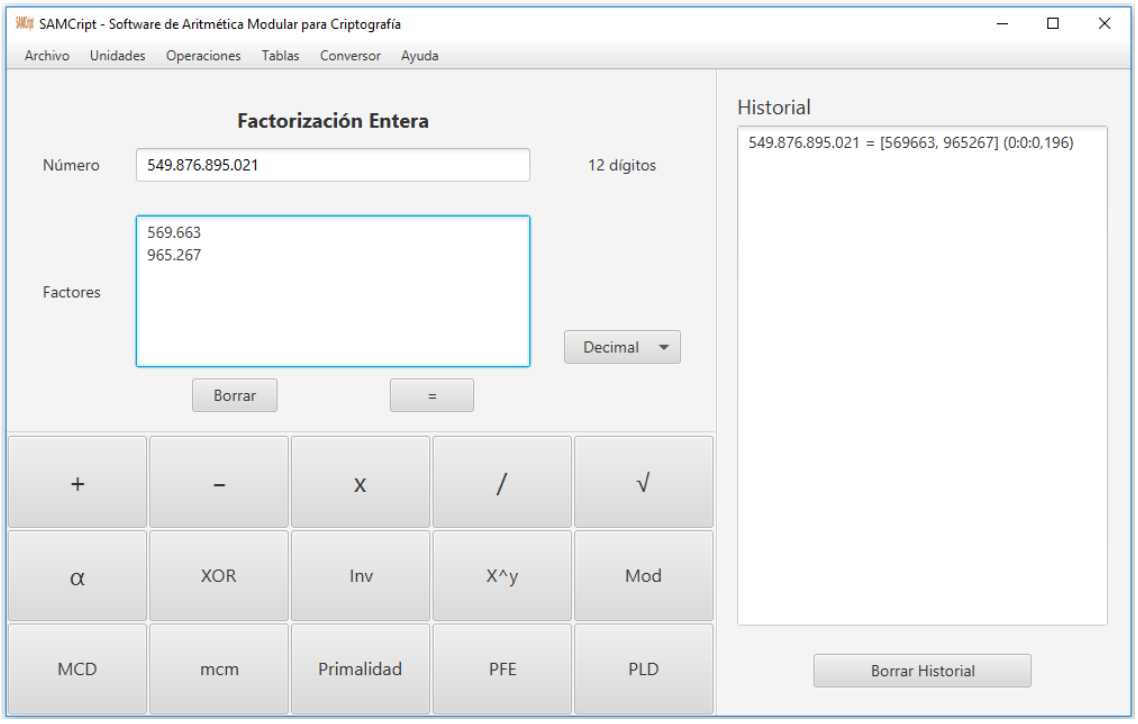


Figura 12. Factorización de 549.876.895.021 = 569.663 * 965.267.

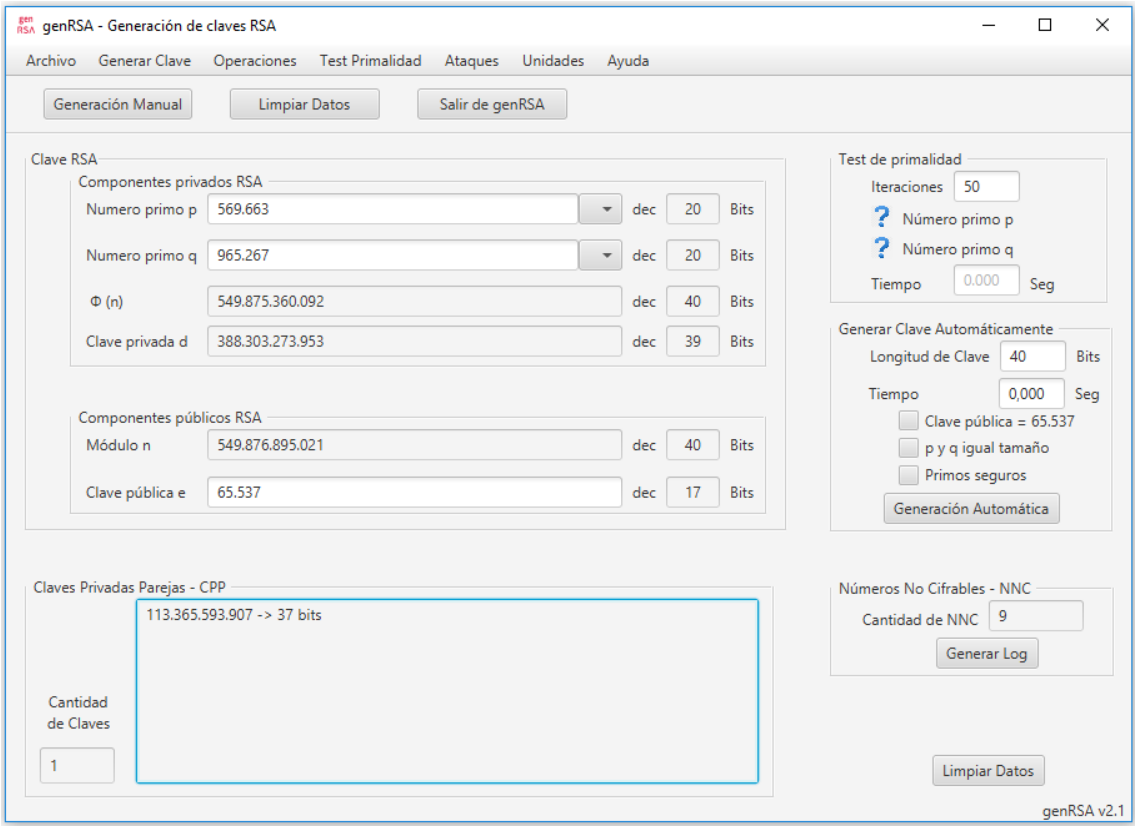


Figura 13. Generación de la Clave2, en la que 113.365.593.907 es su única clave privada pareja.

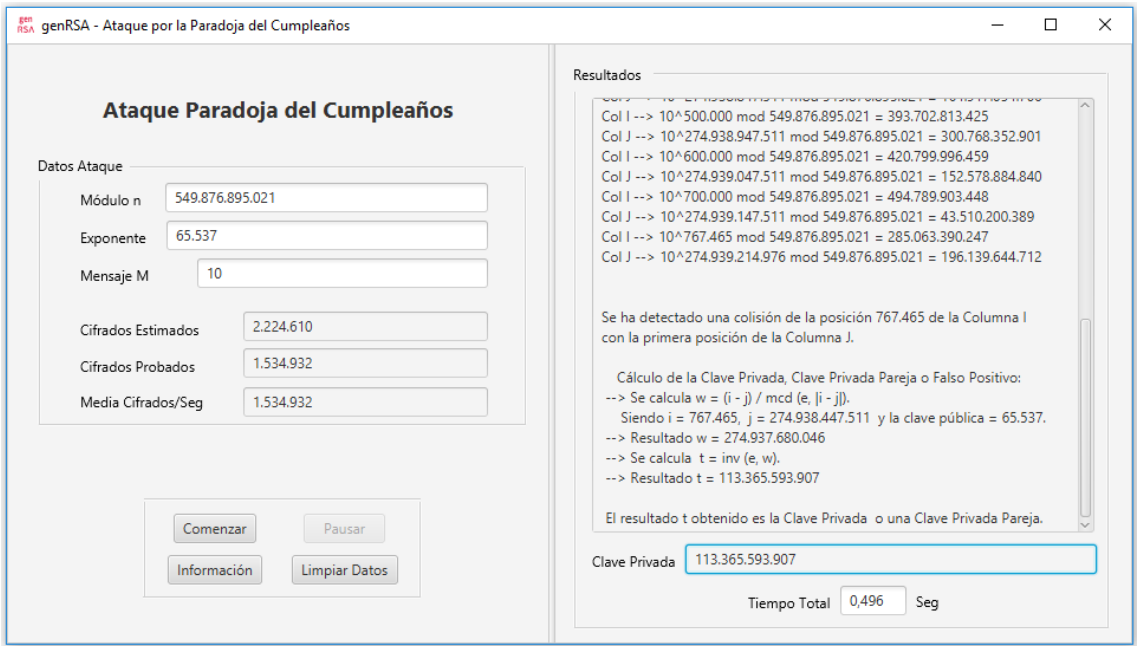


Figura 14. Ataque con M = 10 con resultado d' = 113.365.593.907.

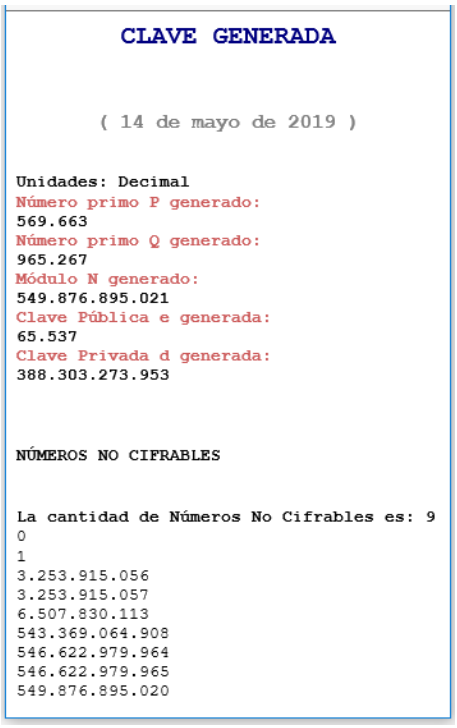


Figura 15. Números no cifrables de la Clave2.

NNC = 3.253.915.056: con M = 3.253.915.055 (-1) obtenemos 27.633.563.585, FP
NNC = 3.253.915.057: con M = 3.253.915.058 (+1) obtenemos 258.212.411.323, FP
NNC = 6.507.830.113: con M = 6.507.830.114 (+1) obtenemos 172.425.301.757, FP
NNC = 6.507.830.113: con M = 6.507.830.115 (+2) obtenemos 258.212.411.323, FP
NNC = 543.369.064.908: con M = 543.369.064.906 (-2) obtenemos 172.425.301.757, FP
NNC = 543.369.064.908: con M = 543.369.064.907 (-1) obtenemos 172.425.301.757, FP
NNC = 543.369.064.908: con M = 543.369.064.910 (+2) obtenemos 27.633.563.585, FP
NNC = 546.622.979.964: con M = 546.622.979.963 (-1) obtenemos 172.425.301.757, FP
NNC = 546.622.979.965: con M = 546.622.979.966 (+1) obtenemos 27.633.563.585, FP

Figura 15. Ejemplos de falsos positivos en ataques por paradoja del cumpleaños para valores de M en las inmediaciones de un NNC de Clave2.

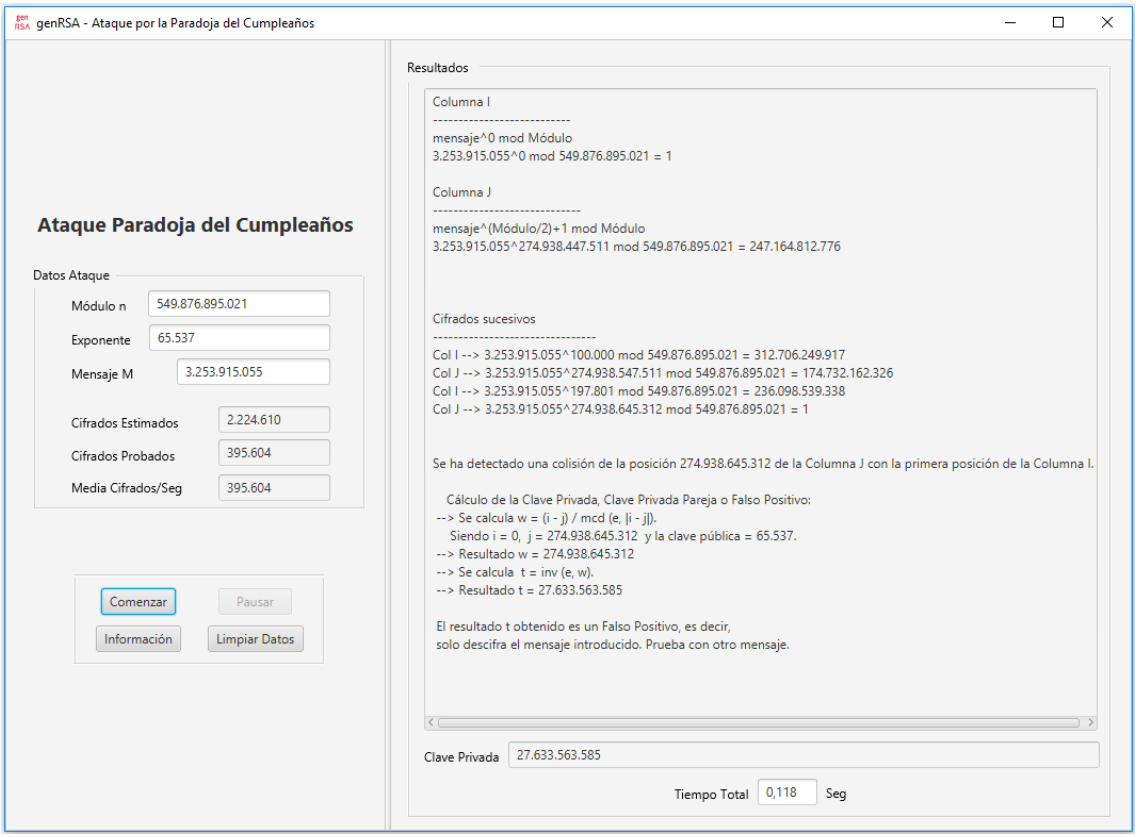


Figura 16. Colisión entre valor de la columna j y el primer valor de la columna i (1)

Nota y curiosidad:

Parece ser que lo común que la colisión que entrega un resultado positivo del ataque por la paradoja del cumpleaños, es decir que encuentra la clave privada o una clave privada pareja, se produzca entre una cifra de la columna i con la primera cifra de la columna j. Al menos para una gran cantidad de casos se ha podido comprobar que así sucede, sin poder determinar a qué puede deberse. No obstante, cuando se obtiene un falso positivo, se observa que en muchas ocasiones la colisión se produce entre el primer valor de la columna i (cuyo resultado es siempre 1 dado que i = 0) y un resultado de la columna j. Algo digno de estudio…

Sin embargo, sí hay ejemplos de colisiones al revés (resultado de j que colisiona con primer valor de i) y que entregan resultados positivos. Por ejemplo, puede comprobar que:

- Con p = 41, q = 61, e = 7, si M = 2 se obtiene una CPP y la colisión se da en i=0, j=1.260.
- Con p = 37, q = 73, e = 5, si M = 2 se obtiene una CPP y la colisión se da en i=0, j=1.368.

III. Incidencia de la clave pública en el resultado del ataque por la paradoja del cumpleaños

Ejercicio 3

3.1. Con genRSA genera la Clave3 de 32 bits Clave3: p = 51.287, q = 64.763, e = 3.

3.2. Realiza un ataque por paradoja del cumpleaños a la Clave3 con los valores 1 < M < 11.

3.3. Comprueba que en todos los ataques se obtiene siempre d' = 553.563.989, la única clave privada pareja, y que la colisión se produce siempre entre el primer valor de la columna j (j = 1.660.749.991) y un valor de la columna i (i = 58.025).

Comprueba tu trabajo:

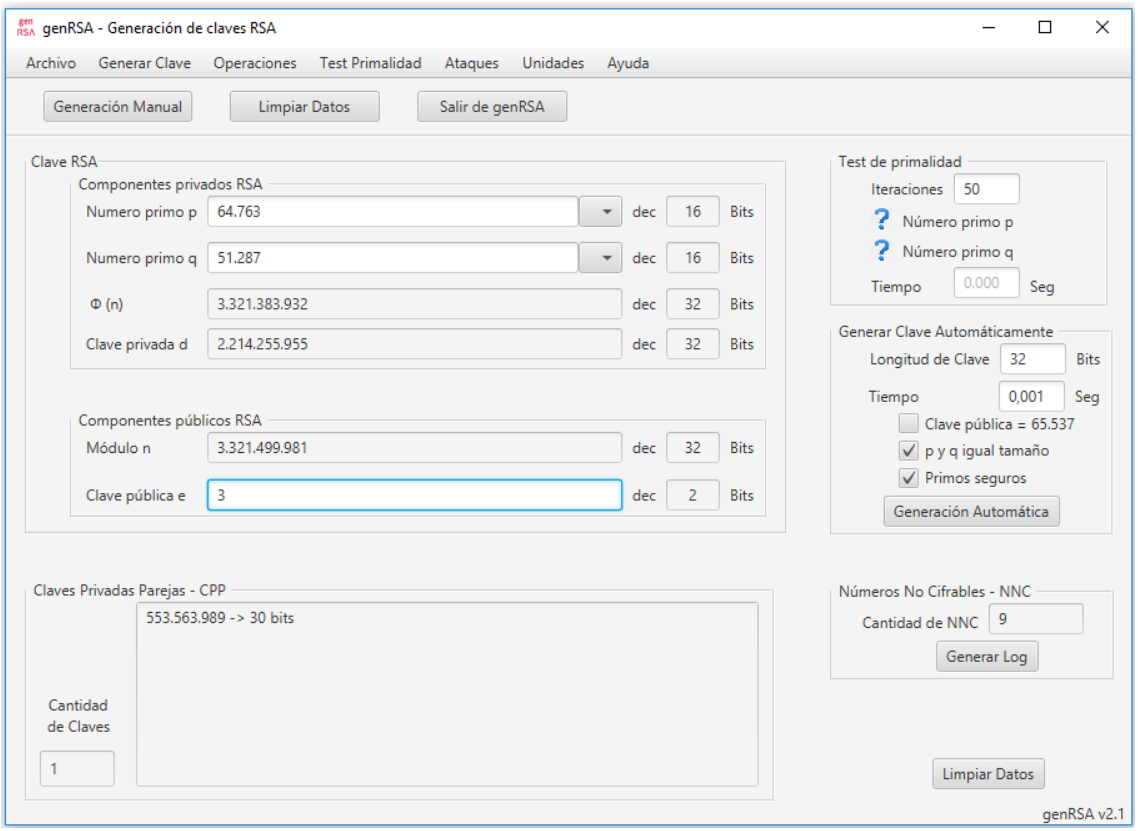


Figura 17. Clave3.

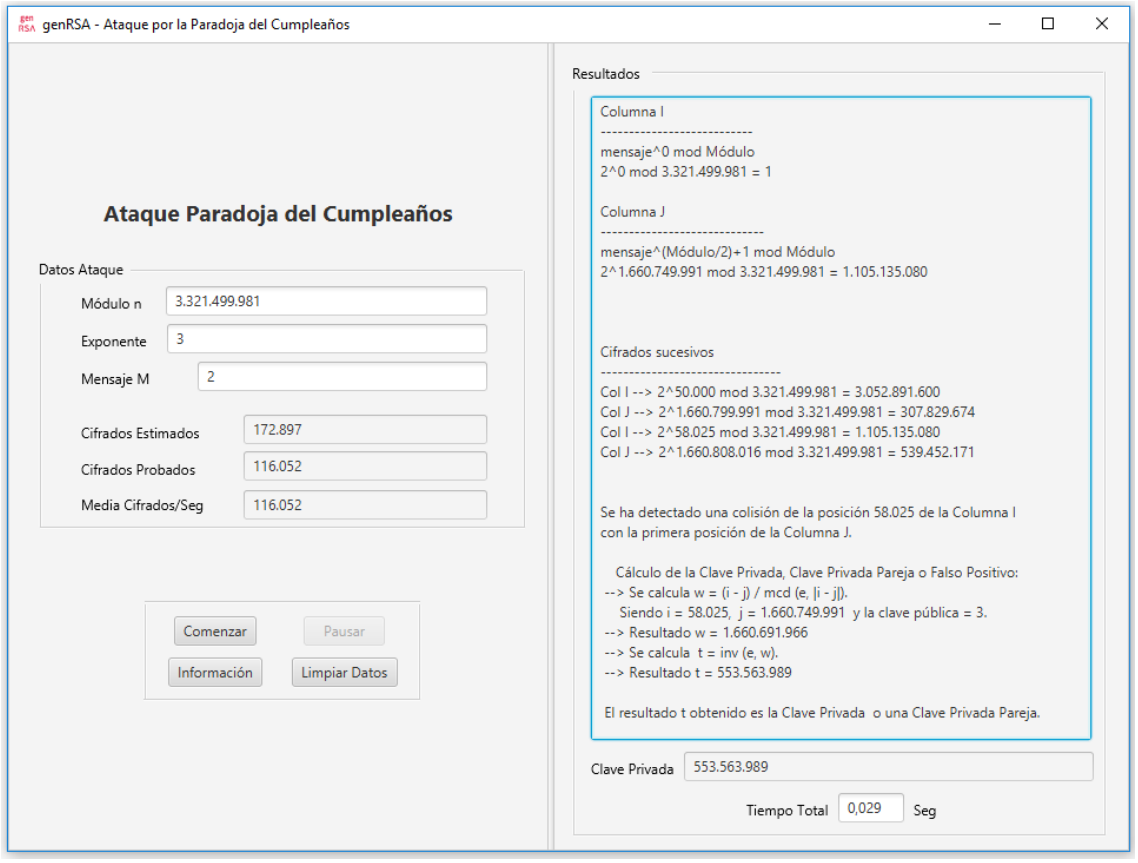


Figura 18. Ataque por paradoja del cumpleaños a Clave3 para M = 2.

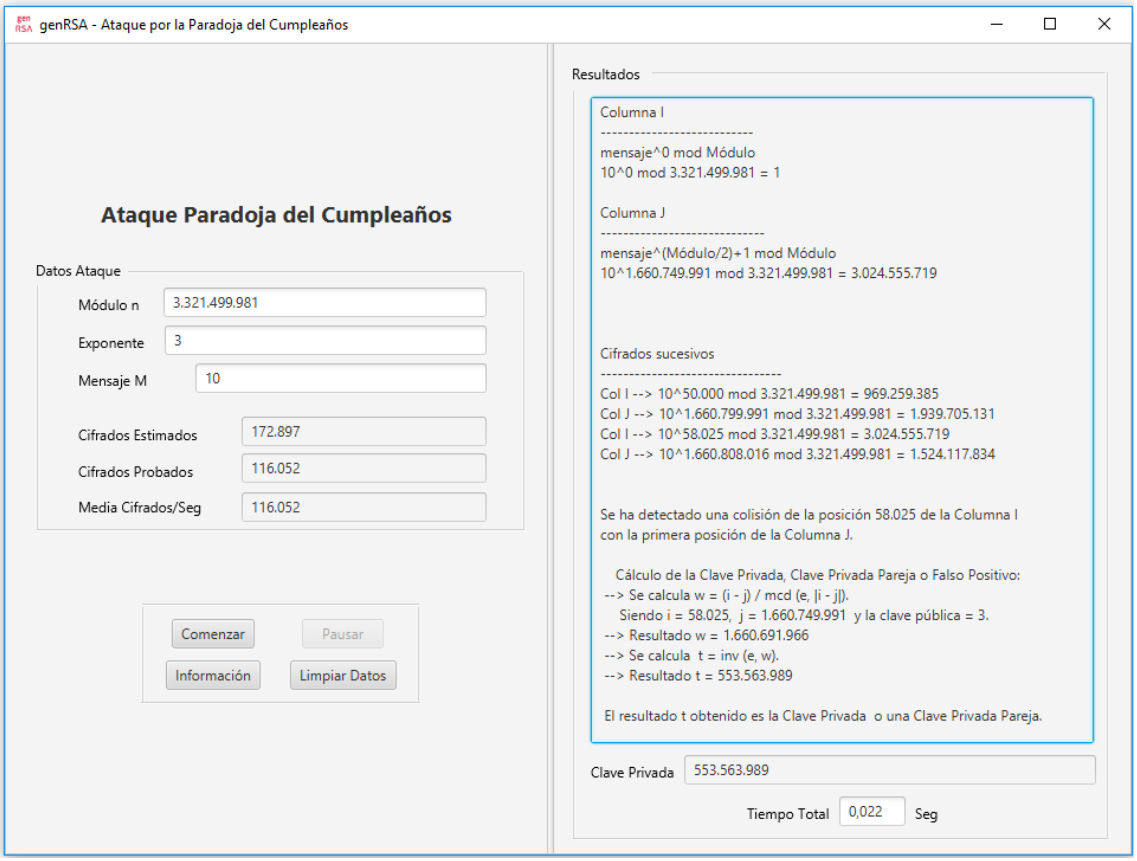


Figura 19. Ataque por paradoja del cumpleaños a Clave3 para M = 10.

Ejercicio 4

4.1. Con genRSA genera la Clave4 de 32 bits Clave3: p = 51.287, q = 64.763, e = 5.

4.2. Realiza un ataque por paradoja del cumpleaños a la Clave4 con los valores 1 < M < 11.

4.3. Comprueba que en todos los ataques se obtiene siempre d = 1.328.553.573, la clave privada, y que nuevamente la colisión se produce siempre entre el primer valor de la columna j (j = 1.660.749.991) y un valor de la columna i (i = 58.025), los mismos valores del caso anterior.

Comprueba tu trabajo:

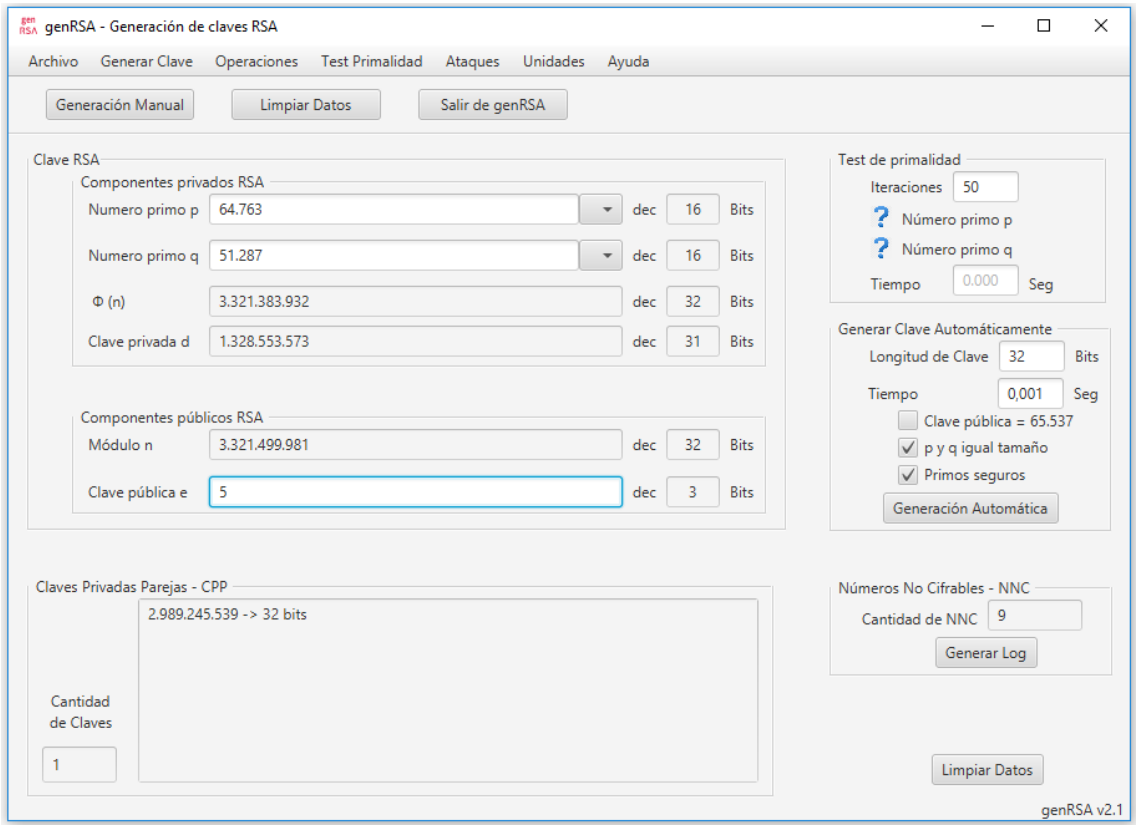


Figura 20. Clave4.

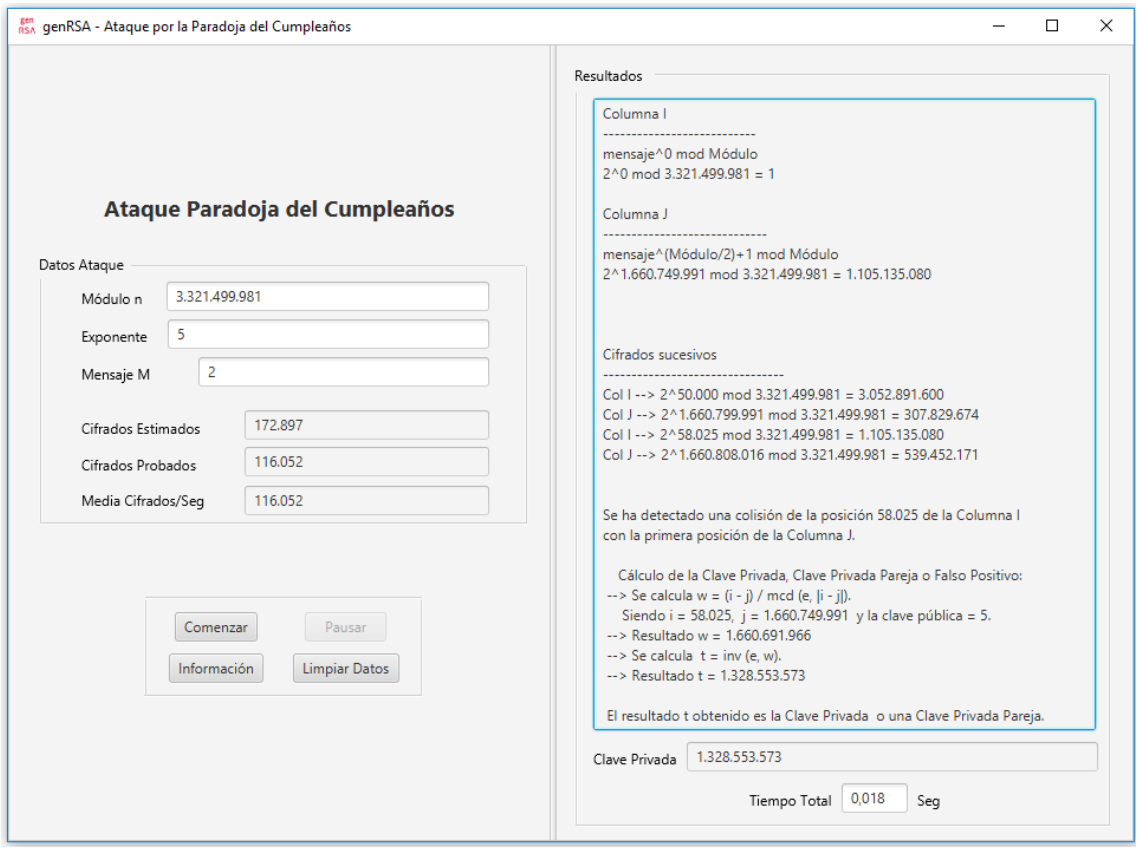


Figura 21. Ataque por paradoja del cumpleaños a Clave4 para M = 2.

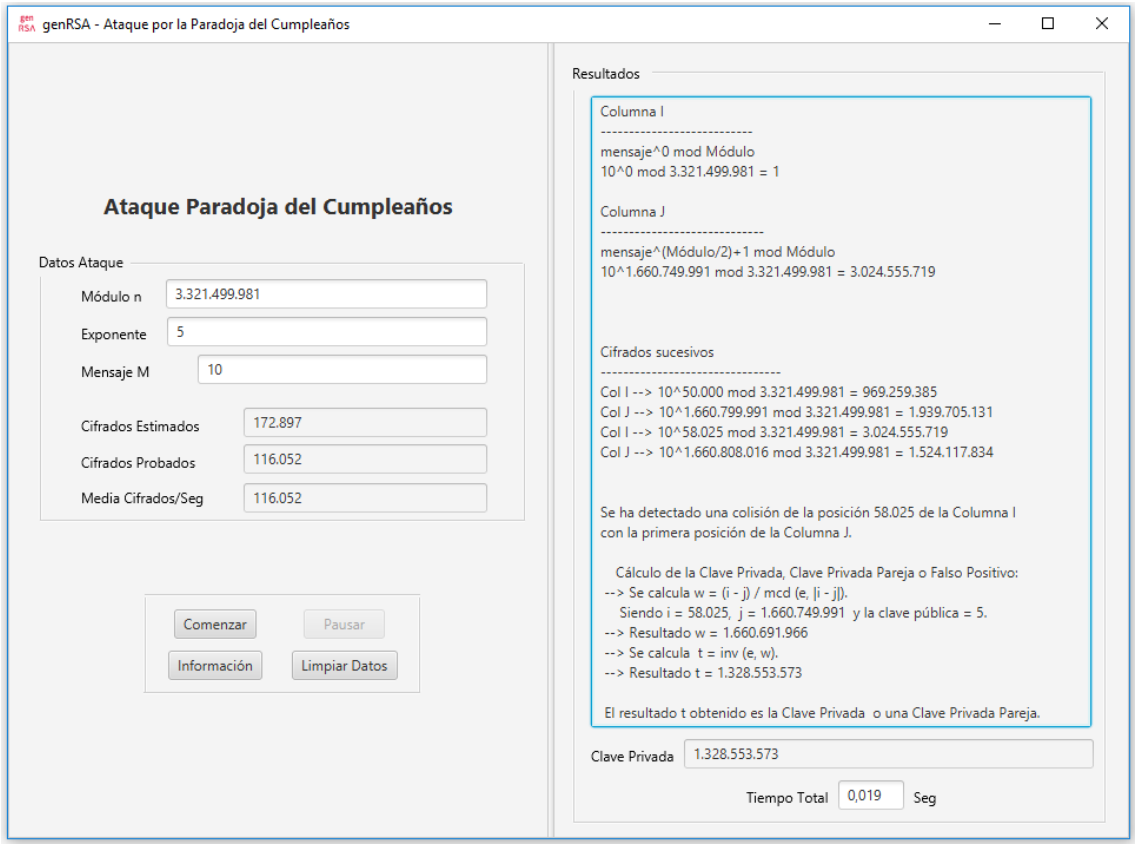


Figura 22. Ataque por paradoja del cumpleaños a Clave4 para M = 10.

Puedes utilizar esta documentación, otros libros, material multimedia y software de prácticas generados en Criptored, todos de libre distribución en Internet, para poder demostrar que entiendes y sabes cómo trabaja la criptografía, logrando la nueva certificación técnica profesional CriptoCert Certified Crypto Analyst, reconocida por el Centro Criptológico Nacional CCN de España, disponible desde el mes de abril de 2019.

Encontrarás más información sobre esta certificación y correo de contacto en el sitio web:
https://www.criptocert.com

Madrid, 16 de mayo de 2019
Dr. Jorge Ramió Aguirre